

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

数和数列

Numbers and Sequences

孙智宏 著



科学出版社

作者简介

孙智宏, 男, 1965 年出生, 淮阴师范学院数学科学学院教授, 曾获全国师范院校曾宪梓教师奖(1999)、全国优秀教师(2007)等荣誉称号, 主要研究领域为数论、图论与组合数学, 在国际核心刊物(SCI)发表论文 58 篇, 2004 年起担任美国数学会(AMS)会员, 2009 年与 2013 年两次获国家自然科学基金面上项目资助。

数和数列

孙智宏 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书共分 21 讲,由浅入深,系统介绍了数、数列和初等数论的知识及数论学家的故事,讨论了中学生需要掌握的复数、数学归纳法、等差数列、等比数列、组合数与二项式定理,参加数学竞赛需要掌握的取整函数与抽屉原理、数的整除与一次不定方程、算术基本定理及其应用、中国剩余定理、Fermat 小定理与 Wilson 定理、Euler 函数与 Euler 定理等内容,系统地介绍了 Fibonacci 数、Bernoulli 数、Fermat 数、Mersenne 数和 Lucas 数列等经典的数和数列,并讲述二次互反律、两平方和定理和四平方和定理等初等数论经典内容,最后一讲“数论史话”描述了从 Fermat 到 Kummer 的数论发展史和数论学家的故事。

本书是初等数论的入门读物,适合高中生、大学生、数学爱好者、数学教师与数论工作者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

数和数列/孙智宏著. —北京:科学出版社,2016.12

ISBN 978-7-03-051115-7

I. ①数… II. ①孙… III. ①数列 IV. ①O171

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 309637 号

责任编辑:胡庆家/责任校对:彭 涛
责任印制:张 伟/封面设计:铭轩堂

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京九州迅驰传媒文化有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 12 月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2016 年 12 月第一次印刷 印张:15 3/8

字数:210 000

定价:88.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

数和数列的性质是数学的基础内容, 高考题、数学竞赛题和数论问题都有各种类型和各种难度的整数或数列问题. 本书是为中学生、大学生及数学爱好者写的讲解数和数列基础知识及解题技巧的著作, 也可作为初等数论的教科书或数论的入门著作, 亦可用于高考指导和初等数学竞赛辅导. 本书从较低的起点开始, 由浅入深, 讨论了中学生需要掌握的复数、数学归纳法、等差数列、等比数列、组合数与二项式定理, 参加数学竞赛的学生需要掌握的取整函数与抽屉原理、数的整除与一次不定方程、算术基本定理及其应用、同余性质与同余方程、Fermat 小定理与 Wilson 定理、Euler 函数与 Euler 定理、Fibonacci 数. 前 18 讲的其余部分为初等数论经典内容, 包括素数原根、中国剩余定理、二次互反律、两平方和定理、四平方和定理; 在第 19 讲和第 20 讲中, 作者用独创的方式系统地介绍了 Bernoulli 数、Bernoulli 多项式、Lucas 数列、Fermat 数和 Mersenne 数, 其中包含了作者的一些研究成果.

本书特别注意介绍有关定理的历史背景与最新进展, 收集了各种类型的相关例题和习题, 有些例题和习题是作者所编, 根据作者对数的感悟、研究成果和对数论史的了解, 补充了许多其他书中见不到的命题、证明和习题, 其中个别习题难度较大. 作者力图使本书趣味可读, 富有特色, 便于自学, 包含经典内容、经典例子, 采用 Erdős 所说的“天书”中的最短证明, 既讲解数学思想, 又充分展示数学之美. 为了激发读者对数论的兴趣和对数学的热爱, 最后一讲“数论史话”介绍了从 Fermat 到 Kummer 的数论发展史和数论学家的故事.

为了照顾读者和便于教学之用, 本书各有侧重, 不可能面面俱到, 所

论述的题材也没有过分深入。书末附有 17 篇参考文献,既是作者写书时参考所用,又可供读者深入学习参考。

孙智宏

2016 年 9 月

目 录

前言

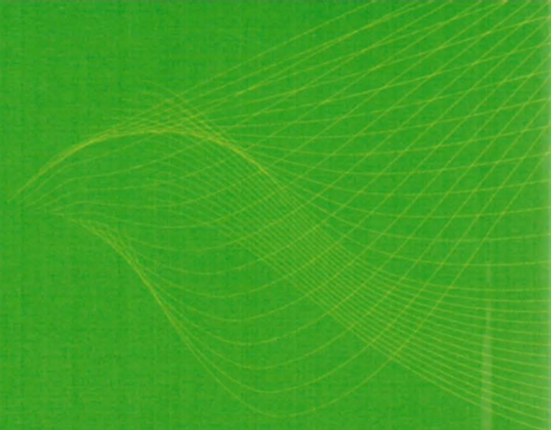
第 1 讲 数的扩张	1
1.1 数和数学的起源.....	1
1.2 复数与四元数.....	5
1.3 典型例题.....	10
习题.....	13
第 2 讲 数学归纳法	14
2.1 第一数学归纳法.....	14
2.2 第二数学归纳法.....	17
2.3 联立归纳法.....	18
习题.....	19
第 3 讲 等差数列	21
3.1 阶乘与求和记号.....	21
3.2 等差数列性质.....	23
3.3 典型例题.....	25
习题.....	30
第 4 讲 等比数列	32
4.1 等比数列概念及性质.....	32
4.2 典型例题.....	33
习题.....	39
第 5 讲 数的整除与一次不定方程	40
5.1 整除性质.....	40
5.2 辗转相除法.....	41
5.3 一次不定方程.....	43

习题	49
第 6 讲 素数	51
6.1 素数概念	51
6.2 素数无穷多的证明	52
6.3 素数判别	53
6.4 素数难题	55
习题	57
第 7 讲 算术基本定理及其应用	58
7.1 算术基本定理	58
7.2 最大公因子与最小公倍数	60
7.3 除数函数 $d(n)$ 与因子和函数 $\sigma(n)$	62
7.4 完全数	64
习题	66
第 8 讲 取整函数与抽屉原理	68
8.1 取整函数性质	68
8.2 阶乘中素数指数计算	70
8.3 抽屉原理	73
习题	75
第 9 讲 同余性质与同余方程	77
9.1 同余概念及性质	77
9.2 同余方程	80
9.3 分数同余	82
习题	84
第 10 讲 中国剩余定理	85
习题	89
第 11 讲 组合数与二项式定理	90
11.1 组合数概念及性质	90
11.2 二项式定理	93

11.3	组合恒等式	96
11.4	Lucas 定理	101
	习题	103
第 12 讲	Fermat 小定理与 Wilson 定理	105
12.1	Fermat 小定理	105
12.2	Wilson 定理	109
	习题	112
第 13 讲	Euler 函数、Euler 定理与素数原根	114
13.1	完全剩余系与简化剩余系	114
13.2	Euler 函数	116
13.3	Euler 定理	119
13.4	素数的原根	120
	习题	123
第 14 讲	二次剩余的 Euler 判别条件	125
14.1	二次剩余概念	125
14.2	Euler 判别条件	127
	习题	131
第 15 讲	二次互反律	132
15.1	Legendre 符号	132
15.2	二次互反律及其证明	135
15.3	Jacobi 符号	138
	习题	143
第 16 讲	两平方和定理	145
	习题	151
第 17 讲	四平方和定理	152
	习题	157
第 18 讲	Fibonacci 数	158
18.1	Fibonacci 数的恒等式与 Lucas 定理	158

18.2	Fibonacci 数的同余性质	163
18.3	Fibonacci 数的应用	167
	习题	169
第 19 讲	Bernoulli 数	170
19.1	Bernoulli 数和 Bernoulli 多项式的基本性质	170
19.2	Bernoulli 幂和公式	175
19.3	Bernoulli 数的同余式	177
19.4	Bernoulli 数的其他经典结果	182
	习题	183
第 20 讲	Lucas 数列、Fermat 数与 Mersenne 数	185
20.1	Lucas 数列的恒等式	185
20.2	Lucas 数列的同余性质、Fermat 数与 Mersenne 数	194
	习题	207
第 21 讲	数论史话——从 Fermat 到 Kummer	208
21.1	Fermat	208
21.2	Euler	210
21.3	Lagrange 和二元二次型	212
21.4	Legendre	214
21.5	Gauss 和四次互反律	216
21.6	Eisenstein 和三次互反律	220
21.7	Dirichlet, Jacobi 和有理互反律	222
21.8	Riemann 和 Riemann 猜想	225
21.9	Lucas	227
21.10	Kummer 和 Fermat 大定理	227
	参考文献	230
	索引	231

(O-6711.31)



科学出版社互联网入口
科学数理分社
电话: (010) 64001244
E-mail: huqingjia@mail.sciencep.com
销售分类建议: 高等数学

www.sciencep.com

ISBN 978-7-03-051115-7



定 价: 88.00 元